

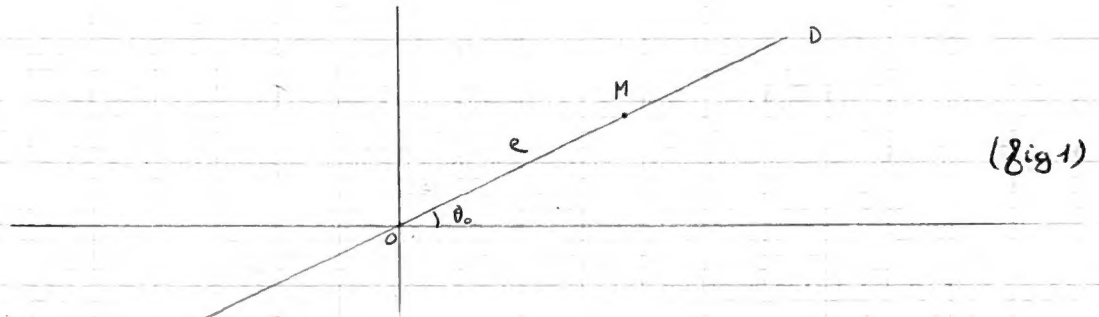
Construction des courbes en coordonnées polaires.

L'emploi des coordonnées polaires permet de représenter très simplement certaines courbes et, par suite, de faciliter les calculs.

Equations de courbes fondamentales.

Equation de la droite

* Droite passant par O : $\theta = \theta_0$, et ceci $\forall r = OM$



* Droite ne passant pas par O.

(D) : $ax + by + c = 0$ avec $c \neq 0$

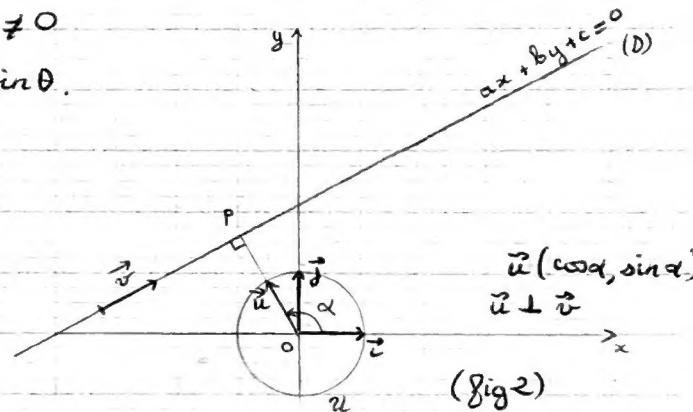
Remplaçons x par $r \cos \theta$ et y par $r \sin \theta$.

$$a r \cos \theta + b r \sin \theta + c = 0$$

$$r = \frac{-c}{a \cos \theta + b \sin \theta}$$

$$r = \frac{1}{-\frac{a}{c} \cos \theta - \frac{b}{c} \sin \theta}$$

Posons $A = -\frac{a}{c}$ et $B = -\frac{b}{c}$.



$$r = \frac{1}{A \cos \theta + B \sin \theta} \quad (1)$$

Inversement, si on nous donne (1), on en déduit : $Ax + By = 1$.

1. Remarque : si (D) \parallel Ox, $a=0 \Rightarrow A=0$ et $r = \frac{a'}{\sin \theta}$ ($y = a'$).

2. Remarque importante :

Posons $r = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. $\exists \alpha \in \mathcal{R} / \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{r}$
 $\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = B r$

$$(1): \quad r = \frac{p}{\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha}$$

$$r = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)} \quad (2)$$

L'équation cartésienne correspondante est :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

C'est l'équation de la droite perpendiculaire en P à la droite OP, où $P(p \cos \alpha, p \sin \alpha)$.

Equation du cercle

Nous n'en calculerons pas dans le cas général. 2 cas particuliers :

- cercle de centre O.

- cercle passant par O.

* cercle de centre O.

C'est: $r = R, \quad \forall \theta$.

* cercle passant par O.

Son équation cartésienne est: $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 \quad (1)$

Le centre $\omega(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$(1): \quad r^2 - 2\alpha r \cos \theta - 2\beta r \sin \theta = 0$$

$$r \neq 0, \quad r = 2\alpha \cos \theta + 2\beta \sin \theta \quad (2)$$

Mais en supposant $r \neq 0$, on suppose que $M \neq O$? Il n'en n'est rien car $r=0$ s'obtient en (2) quand $\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = 0$

$$\text{c'est à dire: } \underbrace{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}_{\cos \alpha} \cos \theta + \underbrace{\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}_{\sin \alpha} \sin \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha - \theta) = 0$$

Réciproquement, multiplions les 2 membres de l'équation (2) par r :

$$r^2 - 2\alpha r \cos \theta - 2\beta r \sin \theta = 0.$$

ouï.

Nous retiendrons par coeur :

$$\text{équation d'un cercle passant par } O : e = A \cos \theta + B \sin \theta$$

$$\text{centre de ce cercle : } \omega \left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2} \right)$$

Coniques de foyer O

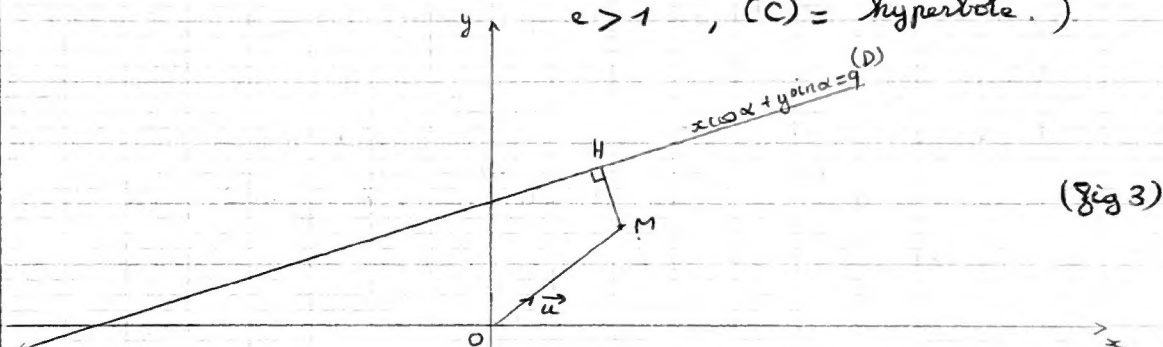
(D) = directrice associée : $x \cos \alpha + y \sin \alpha - q = 0$ (but de simplification)

$$(C) = \{ M \in (P) / OM = e MH \}$$

e = excentricité (rappel, si $e < 1$, (C) = ellipse.

$e = 1$, (C) = parabole.

$e > 1$, (C) = hyperbole.)



$$\| \vec{OM} \| = |e| \quad \text{et} \quad \| \vec{MH} \| = d(M, (D)) = \frac{|e \cos \theta \cos \alpha + e \sin \theta \sin \alpha - q|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}}$$

Ainsi : $|e| = e |e \cos(\theta - \alpha) - q|$

soit $e = e e \cos(\theta - \alpha) - eq$ ou $e = -e e \cos(\theta - \alpha) + eq$

Réolvons en e :

$$e_1 = - \frac{eq}{1 - e \cos(\theta - \alpha)} \quad \text{ou} \quad e_2 = \frac{eq}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$$

Ces 2 ensembles représentent le même ensemble de points puisque $e_1(\pi + \theta)$

$$= -e_2(\theta) \quad \text{et} : \begin{cases} \vec{OM}_1 = -e_2(-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) = \vec{OM}_2 \\ \vec{OH}_2 = e_1(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \end{cases} \quad \text{donc } M_1 = M_2 = M$$

$p = eq$ = paramètre de la conique.

(C) :

$$e = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$$

La réciproque aboutirait aussi. Nous conseillons au lecteur de revoir son cours

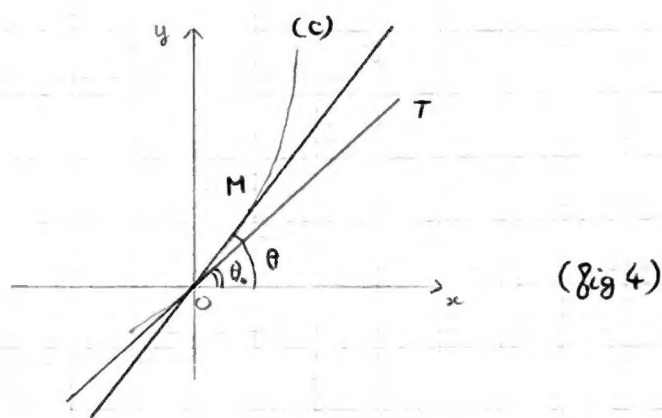
de terminale sur les coniques, et d'en retenir absolument par coeur les formules fondamentales.

Tangente en un point

* tge à l'origine.

e s'annule pour une certaine valeur θ_0 de l'angle polaire θ .

La tge en O à (C) a pour équation polaire $\theta = \theta_0$. (pour $e=0$).



* tge en un pt autre que le pôle.

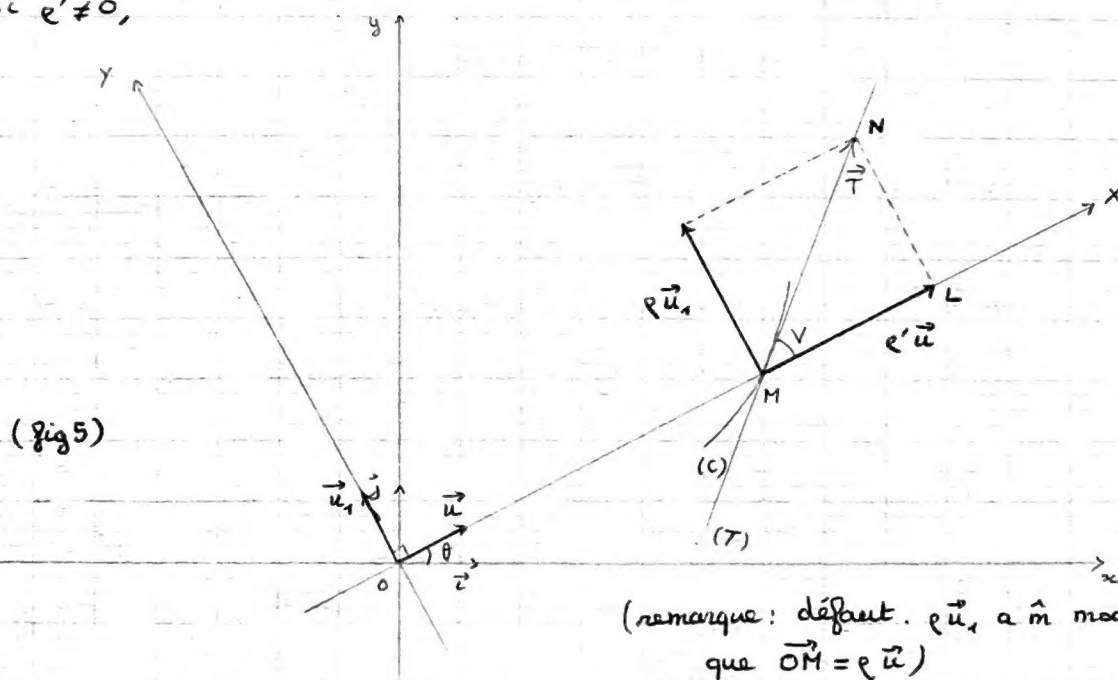
Soit \vec{u} le vecteur unitaire tel que $\text{angle}(\vec{Ox}, \vec{u}) \equiv \theta [2\pi]$.

On a: $\vec{OM} = e \vec{u}$.

Par suite $\frac{d\vec{OM}}{d\theta} = \frac{de}{d\theta} \vec{u} + e \frac{d\vec{u}}{d\theta} = e' \vec{u} + e \vec{u}_\perp$,

avec \vec{u}_\perp = vect. unitaire directement orthogonal à \vec{u} .

Si $e' \neq 0$,



(remarque: défaut. $e \vec{u}_\perp$ a m module que $\vec{OM} = e \vec{u}$)

$$\tan V = \frac{e}{e'} = \frac{NL}{ML} \quad (\tan V \geq 0 \text{ car } \vec{u} \perp \vec{u}_\perp, \quad 0 \leq V \leq \frac{\pi}{2})$$

Si $e' = 0$, $\frac{d\vec{OM}}{d\theta} = e \vec{u}_\perp$. Alors $V = \frac{\pi}{2}$ (complément du cas ci-dessus).

$$\tan \omega = \frac{n}{n'_\theta}$$

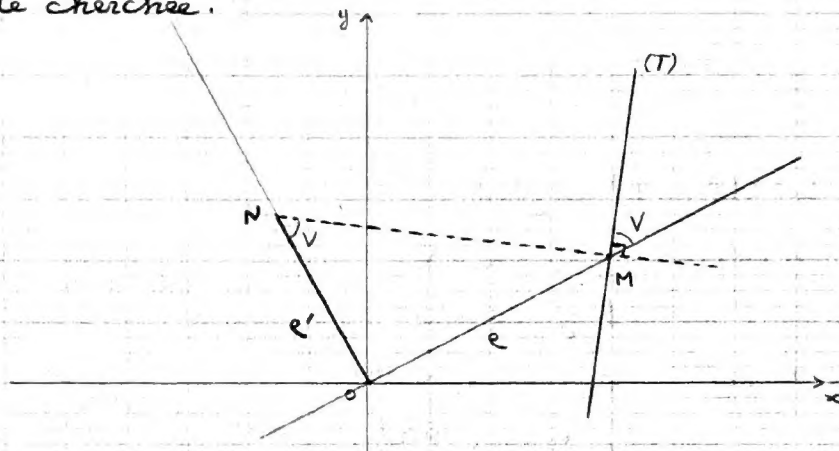
Tracé graphique

On trace la normale à (C) en M , normale qui coupe OY en N et forme avec OY un angle de mesure V (en valeur absolue). Donc $\operatorname{tg} V = \frac{OM}{ON}$

Comme $\operatorname{tg} V = \frac{e}{e'}$, et que $OM = e$, on sait que $ON = e'$.

Cette remarque va permettre le tracé graphique :

On portera e' sur OY , puis on joindra MN . La perpendiculaire à MN en M est la tge cherchée.



Branches infinies.

1° $e \rightarrow \pm \infty$ quand $\theta \rightarrow \theta_0$.

On emploiera alors la représentation paramétrique $\begin{cases} x = e \cos \theta \\ y = e \sin \theta \end{cases}$

2° $e \rightarrow \pm \infty$ quand $\theta \rightarrow \pm \infty$

On dit alors que la courbe admet une "branche spirale".

3° $e \rightarrow e_0$ quand $\theta \rightarrow \pm \infty$

On dit alors que la courbe admet un "cercle asymptote". Plus précisément, si $e \rightarrow a$, la courbe admet le "cercle asymptote" de centre O et de rayon a .

Si $a = 0$, O est le "point asymptote".

Intervalles d'étude et symétries.

$$e = f(\theta).$$

* Si f est périodique de période 2π , on étudie f dans 1 intervalle large d'une période.

* si n impair et $f(\theta + n\pi) = f(\theta)$, alors on prendra un intervalle d'étude de longueur $n\pi$, et l'on complètera la courbe par symétrie par rapport à 0.

En effet : pour θ , $f(\theta) = e$,
$$\begin{cases} x_1 = e \cos \theta \\ y_1 = e \sin \theta \end{cases}$$

Comme $f(\theta + n\pi) = f(\theta) = e$,
$$\begin{cases} x_2 = e \cos(\theta + n\pi) = -e \cos \theta = -x_1 \\ y_2 = e \sin(\theta + n\pi) = -e \sin \theta = -y_1 \end{cases}$$

Il y a donc symétrie par rapport à l'origine.

* Si $f(\theta + n\pi) = -f(\theta)$,

si n impair
$$\begin{cases} x = e \cos \theta \\ y = e \sin \theta \end{cases} \quad \text{sur intervalle } [0, n\pi]$$

si n pair
$$\begin{cases} x = -e \sin \theta \\ y = -e \cos \theta \end{cases} \quad \text{sym. par rapport à 0.}$$

(cf DS 43)

Points doubles

Pour voir si 0 est double, on cherche si l'équation $f(\theta) = 0$ a plus d'une racine dans l'intervalle d'étude.

Un autre pt que 0 est double soit si :

$$f(\theta + k2\pi) = f(\theta)$$

soit si $f(\theta + k2\pi) = -f(\theta)$.

En effet :
$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta = f(\theta') \cos \theta' & (1) \\ y = f(\theta) \sin \theta = f(\theta') \sin \theta' & (2) \end{cases}$$

donc $\tan \theta = \tan \theta' \Rightarrow \theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}$ donc $\theta' = \theta + k2\pi$
ou $\theta' \equiv \theta + \pi \pmod{2\pi}$ donc $\theta' = \pi + \theta + k2\pi$

alors (1) $f(\theta) \cos \theta = f(\theta + k2\pi) \cos(\theta)$

(2) $f(\theta + k2\pi) = f(\theta)$

ou : (1) $f(\theta) \cos \theta = f(\theta + (2k+1)\pi) \cos(\theta + \pi)$
 $f(\theta + (2k+1)\pi) = -f(\theta)$

CQFD

Trace d'une courbe en coordonnées polaires.

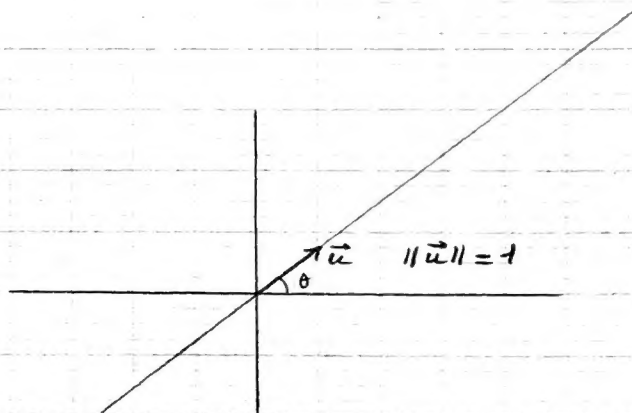
En général, on n'a pas intérêt à calculer ρ' .

Au contraire, il est essentiel de connaître le signe de ρ et de déterminer les valeurs de θ pour lesquelles ρ s'annule. En effet, on trace la courbe en balayant le plan par une droite tournant autour de O . Si θ varie de α à β , cette droite balayera un secteur angulaire formé de 2 parties symétriques par rapport à O . La courbe se place dans l'une ou l'autre de ces parties suivant le signe de ρ .

Règles:

1. Intervalles d'études, périodicité et symétries.
2. On cherche les valeurs de θ pour lesquelles ρ est défini.
3. On détermine le signe de ρ .
4. On dresse un tableau de variation.
5. On étudie les branches infinies.
6. On détermine (ou non) les pts doubles.

Exemples: voir D5 45.



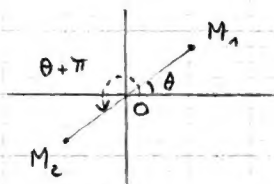
Retour sur les symétries possibles et moyens pratiques.

Voyons cela sur un exemple.

Soit la courbe $\rho = a \sin 2\theta$, avec $a > 0$.

$$\rho = a \sin 2\theta = f(\theta)$$

f est périodique, de période π .



$$\text{et } \overline{OM_1} = f(\theta) = f(\theta + \pi) = \overline{OM_2}$$

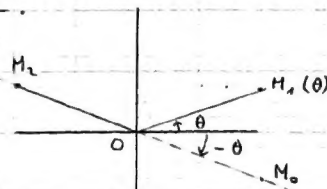
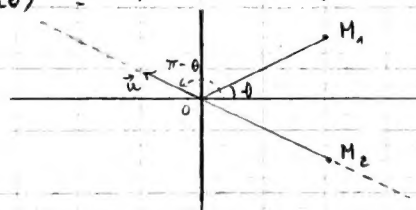
La courbe (Γ) à tracer est donc symétrique par rapport à l'origine.

On l'étudiera sur $[0, \pi]$, puis on complètera par symétrie.

De plus:

$$* f(-\theta) = -f(\theta) : \text{symétrie par rapport à } Oy$$

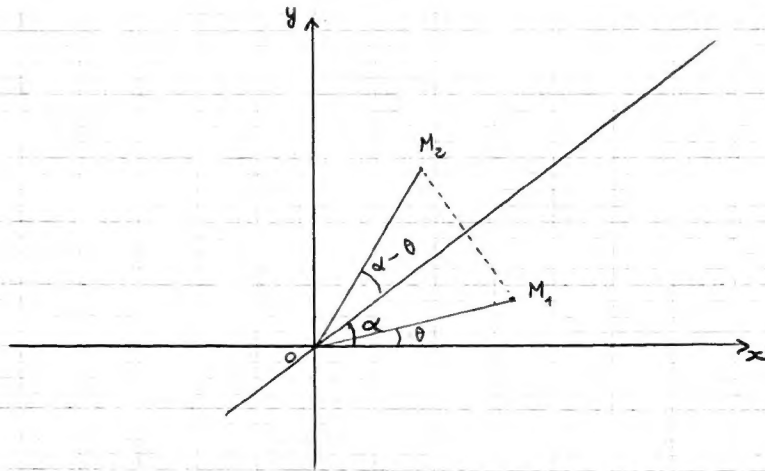
$$* f(\pi - \theta) = -f(\theta) : \text{ " " " } Ox$$



Le signe - se traduit par M_2 au lieu de M_0 .

$$\vec{u} = \cos(-\theta)\vec{i} + \sin(-\theta)\vec{j}$$

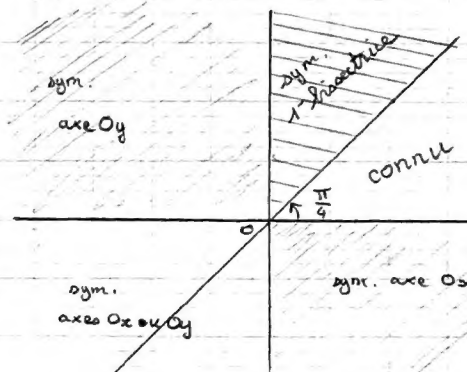
Plus généralement, soit la droite passant par O et d'équation: $\theta = \alpha$.
 Cette droite est axe de symétrie soit: $f(\theta) = f(2\alpha - \theta)$.



Ici $f(\frac{\pi}{2} - \theta) = a \sin(\pi - 2\theta) = a \sin 2\theta = f(\theta)$

La courbe est donc symétrique par rapport à la première bissectrice.

En conclusion:



on étudie sur $[0, \pi]$

on étudie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Donc, sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

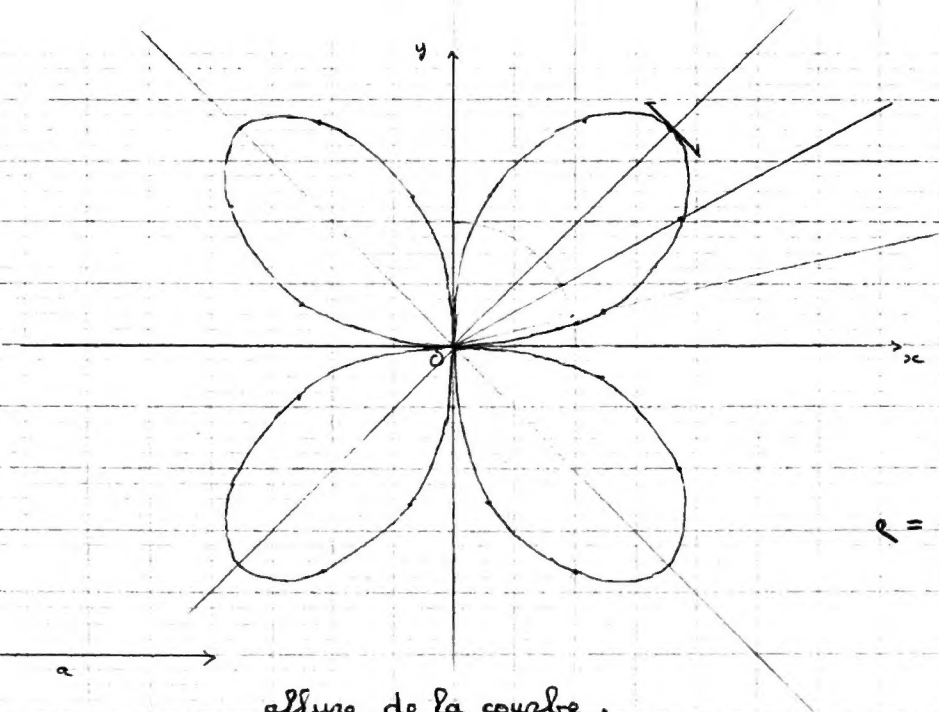
$$\begin{aligned} \rho &= a \sin 2\theta & \theta &= 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ \rho &= 0 & \theta &= \frac{\pi}{4} \rightarrow a \end{aligned}$$

sans qu'il soit nécessaire de calculer ρ' .

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\rho' = 2a \cos 2\theta$ est nul. La tangente est alors perpendiculaire à \vec{OM} (soit $(\vec{OM})' = \rho' \vec{u} + \rho \frac{d\vec{u}}{d\theta}$). La courbe a la forme d'un rose à 4 branches (cf figure)

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \rho = a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} =$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} \quad \rho = \frac{a}{2}$$



$$r = a \sin 2\theta$$

allure de la courbe.

Nous conseillons au lecteur de s'exercer vivement à ce genre d'exercice. (cf D5)
Tous les exemples types sont donnés dans la ligne D5 46, prière de s'y reporter.

Exemples de courbes en coord. polaires

La cardiïde et la cissoïde.

1° La cardiïde

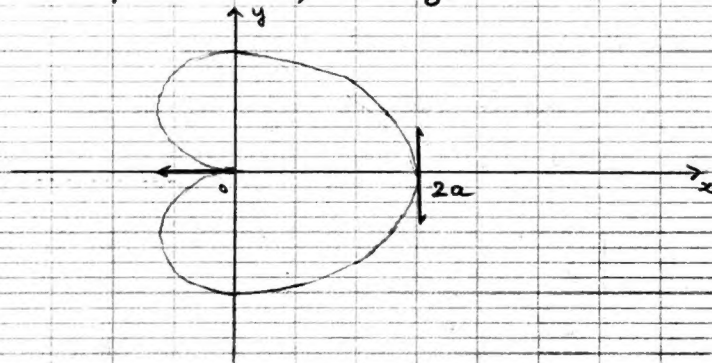
C'est la courbe d'équation : $\rho = a(1 + \cos \theta)$

$$T = 2\pi \quad f(-\theta) = f(\theta) \Rightarrow \text{sym /}_a \text{Ox}$$

On étudiera f sur $[0, \pi]$

θ	0	π
ρ	$2a$	0

ρ s'annulant pour $\theta = \pi$, la tgte en ce pt sera parallèle à Ox



2° La cissoïde

$$\rho = a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (a > 0)$$

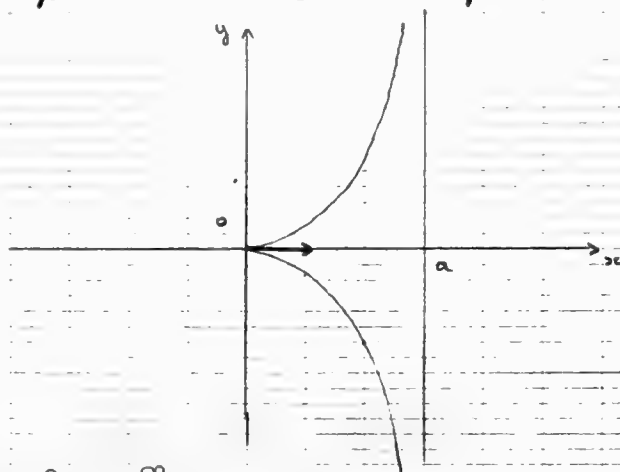
$$T = 2\pi \quad f(-\theta) = f(\theta) \Rightarrow \text{sym /}_a \text{Ox}$$

De plus, $x = \rho \cos \theta = a \sin^2 \theta \geq 0$ donc la courbe se trouve totalement dans le demi-plan $x \geq 0$. Il suffira d'étudier les variations de $f(\theta)$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et de compléter par symétrie.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0 \nearrow	$+\infty$

On observe que : $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} a \sin^2 \theta = a$

La courbe admet donc pour asymptote la droite d'équation $x=a$.
 L'origine est 1 pt de rebroussement de 1^{re} espèce.



La strophoïde et la lemniscate de Bernoulli

1° La Strophoïde

$$\rho = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \quad (a > 0)$$

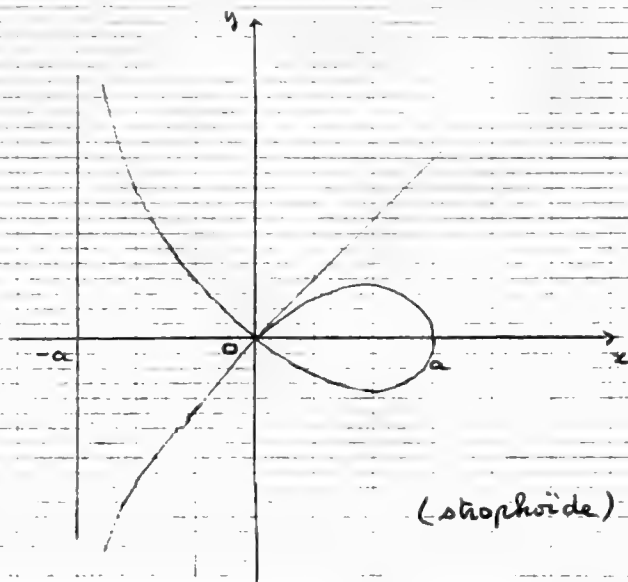
$$T=2\pi$$

$$f(-\theta) = f(\theta) \Rightarrow \text{sym } /_a Ox$$

L'intervalle d'étude est encore $[0, \frac{\pi}{2}]$ car on remarque que θ décrivant $[0, \frac{\pi}{2}]$, ρ s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ et la courbe se dessine dans les IV de plan (1) et (3).

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	a	+	0
	-	-	$-\infty$

Quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $x = \rho \cos \theta = a \cos 2\theta \rightarrow -a$. D'où l'asymptote:
 $x = -a$

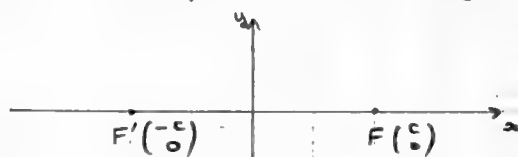


(strophoïde)

2° Lemniscate de Bernoulli

C'est l'ensemble des pts dont le produit des distances à 2 pts donnés F et F' est égal au carré de la demi-distance $\frac{FF'}{2}$.

Prends le repère suivant précisé sur la figure :



L'équation de la lemniscate sera donc :

$$MF \times MF' = c^2$$

$$[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2] = c^4$$

en coordonnées polaires :

$$[(\rho \cos \theta - c)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta][(\rho \cos \theta + c)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta] = c^4$$

$$(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \theta)(\rho^2 + c^2 + 2\rho c \cos \theta) = c^4$$

$$(\rho^2 + c^2)^2 - 4c^2 \rho^2 \cos^2 \theta = c^4$$

$$\rho^4 = 2c^2 \rho^2 \cos 2\theta \quad \rho = 0 \Rightarrow 0 \in (\text{curve})$$

$$\text{Si } \rho \neq 0 \quad \rho^2 = 2c^2 \cos 2\theta$$

Posons $a = c\sqrt{2}$, alors l'éq de la courbe, et m le pt 0, sera obtenue en prenant :

$$\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}$$

Etude de $\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}$.

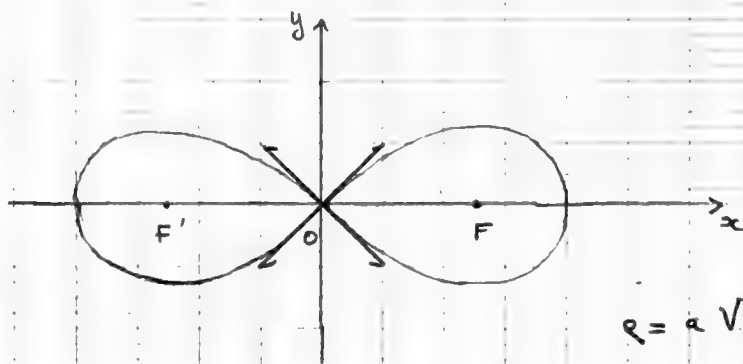
$T = \pi$ et l'on doit avoir $\cos 2\theta \geq 0 \Rightarrow$ sur $[0, \pi]$: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$
ρ	a	0

Les axes de coordonnées sont axes de symétrie car $f(-\theta) = f(\theta)$ et

$$f(\pi - \theta) = f(\theta)$$

La courbe a la forme d'un huit, les tangentes à l'origine sont orthogonales :



des spirales

On appelle ainsi les courbes admettant une branche spirale ou un point asymptote. Il y a 3 spirales classiques:

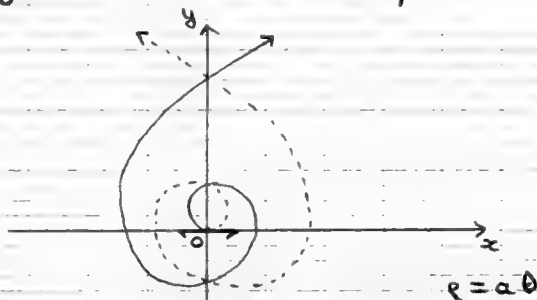
1° Spirale d'Archimède : $\rho = a\theta$

$f(-\theta) = -f(\theta) \Rightarrow$ courbe sym / à Oy

Elle n'est pas périodique. On l'étudiera sur $[0, +\infty[$

θ	0	$+\infty$	
ρ	0	$+\infty$	($a > 0$)

La courbe est tgte en 0 à Ox (puisque $\rho = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$)

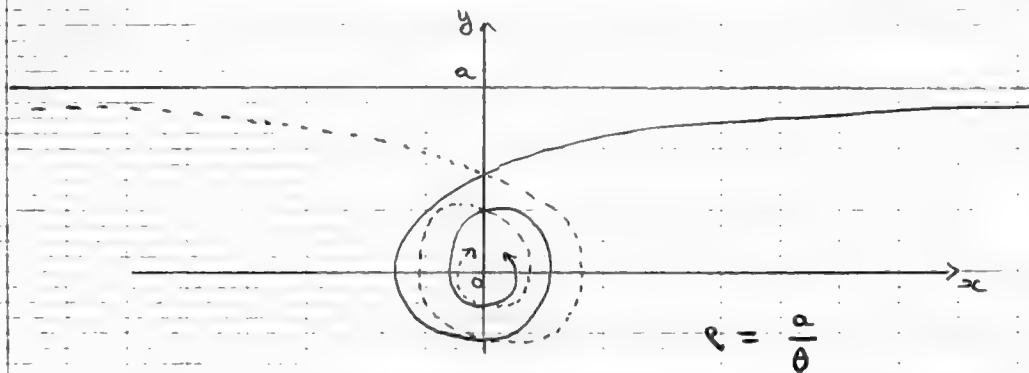


2° Spirale hyperbolique $\rho = \frac{a}{\theta}$

La courbe est encore symétrique par rapport à Oy

θ	0	$+\infty$	
ρ	$+\infty$	0	

L'origine est point asymptote. Quand $\theta \rightarrow 0$ $y \rightarrow a$; la courbe admet donc une asymptote horizontale.



3° Spirale logarithmique : $\rho = a e^{m\theta}$

($a, m > 0$)

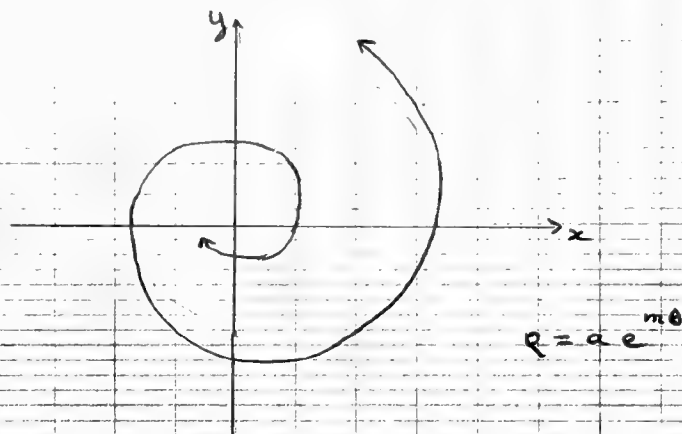
Il n'y a ni sym, ni période.

θ	$-\infty$		$+\infty$
ρ	0	\uparrow	$+\infty$

L'origine est point asymptote. On remarquera que :

$$\rho(\theta + 2\pi) = e^{2\pi m} \rho(\theta)$$

On peut donc déduire la courbe tte entière à partir de l'arc correspondant à $[0, 2\pi]$, à l'aide d'homothéties de centre O.



Étude métrique des courbes

Longueur d'un arc de courbe

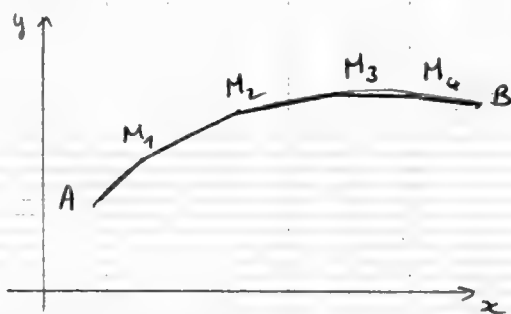
Soit (I, γ) un arc paramétré où $I = [a, b]$ et où γ est une fct vectorielle: $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \vec{E}$

$$t \mapsto \gamma(t) = \vec{OM}$$

Soit $S = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de I telle que:

$$t_0 = a \leq t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

La ligne polygonale de sommets $M_0 = A = \gamma(a)$, $M_1 = \gamma(t_1)$, ..., $M_n = \gamma(b) = B$ est appelée "ligne polygonale inscrite dans l'arc paramétré" associée à la subdivision S .



Si l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc admet une borne supérieure l , alors on dira que l est la longueur de l'arc paramétré. On démontre que l est aussi la limite quand $n \rightarrow +\infty$ des lignes polygonales inscrites.

Si γ est continûment dérivable, l'arc est rectifiable et:

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} S \quad \text{où} \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\| (t_{i+1} - t_i)$$

Donc

$$l = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Si $y = \text{fonction de } x$, $\gamma'(t) = (1, y')$ (ici $t = x$)

Ainsi

$$l = \int_{a=x}^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Plus généralement, soit $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Le vecteur $f'(t)$ a pour composantes $(f'(t), g'(t))$. Alors :

$$l = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt$$

D'autre part, en coordonnées polaires, $\vec{OM} = \rho \vec{u}$ donc :

$$\frac{d\vec{OM}}{d\theta} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{u}_1 \quad \text{où} \quad \vec{u}_1 = \frac{d\vec{u}}{d\theta}$$

par suite :

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

Exemples de calcul

1° Arc de parabole

$y = \frac{x^2}{8}$. Calculer la longueur de l'arc correspondant à $[0, 4]$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{16}} dx$$

Poseons $x = 4 \operatorname{sh} t$ alors $l = \int_0^{\operatorname{Argsh} 1} \operatorname{ch} t \cdot 4 \operatorname{ch} t dt$

$$l = 4 \int_0^{\operatorname{Argsh} 1} \operatorname{ch}^2 t dt = 2 \int_0^{\operatorname{Argsh} 1} (1 + \operatorname{ch} 2t) dt = 2t + \operatorname{sh} 2t$$

Finalement : $l = 2 \operatorname{Argsh} 1 + 2\sqrt{2}$

$$l = 2 [\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}]$$

2° Cercle

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -R \sin t \\ y' = R \cos t \end{cases} \quad R > 0$$

pour $t \in [0, 2\pi]$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = [Rt]_0^{2\pi} = 2\pi R$$

3° Cardioid

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

$$r' = -a \sin \theta = \frac{dr}{d\theta}$$

On fait varier θ de $-\pi$ à π :

$$L = a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \, d\theta$$

$$= a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} \, d\theta$$

$$= a \int_{-\pi}^{\pi} 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \, d\theta \quad \text{sur } [-\pi, \pi] \quad \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Donc } L = 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = 8a$$

Etude de la chaînette

Aire limitée par le support d'un arc paramétré.

Rappel de la formule de Stokes :

(admise)

$$\oint_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

Cherchons une forme autre de (1).

$$\oint_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{(C)} P dx + Q dy$$

si $\vec{F} (P, Q)$ dans le plan (O, x, y)

$$d\vec{S} = (0, 0, dx dy)$$

et

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Ainsi, on obtient la formule de Green - Riemann :

$$\int_{(C)} P dx + Q dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (2)$$

Cel : si l'origine et l'extrémité de l'arc sont confondues, on trouve :

$$S = - \int y dx = \int x dy = \frac{1}{2} \int x dy - y dx \quad (3)$$

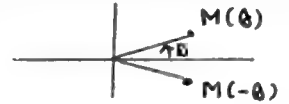
en prenant des valeurs P et Q particulières dans (2)

(par ex: $P = -y$ et $Q = 0$)

Étudier et représenter la courbe :

$$\rho = 2 \cos \theta - \cos 2\theta$$

Montrer que les tangentes aux points doubles distincts de l'origine sont perpendiculaires.



$$* \theta \in [-\pi, \pi]$$

$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc on se restreint à $[0, \pi]$ puis on complète par symétrie $/_{\alpha} Ox$.

$$* \rho' = -2 \sin \theta + 2 \sin 2\theta = -2 \sin \theta + 4 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta (2 \cos \theta - 1)$$

$$\rho' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi, \text{ ici } \theta = 0 \text{ ou } \pi \\ \text{ou} \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \text{ ici } \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
ρ'	0	+	0
ρ	1	$\nearrow \frac{3}{2}$	$\rightarrow -3$

* $M(\frac{\pi}{2})$ sur l'axe Oy : $\rho(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\rho'(\frac{\pi}{2}) = -2$ donc $\tan V = \frac{1}{-2}$.
La tgte en $M(\frac{\pi}{2})$ est de pente $-\frac{1}{2}$ dans le repère $(M(\frac{\pi}{2}), \vec{u}_{\frac{\pi}{2}}, \vec{v}_{\frac{\pi}{2}})$

$$* \underline{\rho(\theta) = 0} \Leftrightarrow 2 \cos \theta - \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1}{2 \cos^2 \theta - 1} = 0$$

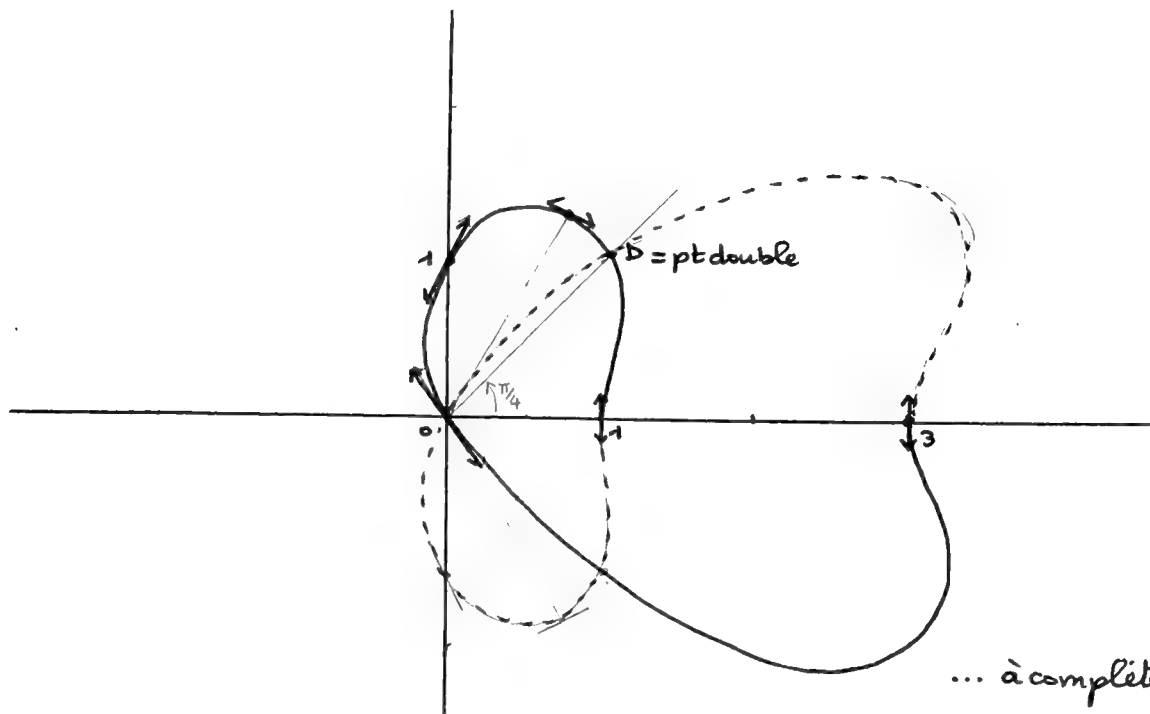
$$\text{d'où } \cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

On trouve $\theta = \theta_0$ où $\theta_0 \approx 111^\circ$.

La tangente en $M(\theta_0) = O$ est dirigée par \vec{u}_{θ_0} .

* Tgte en $\theta = 0$: $\tan V = \frac{\rho(0)}{\rho'(0)} = \infty$ donc $V = \frac{\pi}{2} \in]\pi]$ et la tgte en $M(0)$ est verticale.

* Tgte en $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou π . On a encore $\tan V = \infty$ donc $V = \frac{\pi}{2} \in]\pi]$,
et la tangente à $M(\frac{\pi}{3})$ (resp. $M(\pi)$) est perpendiculaire à $(OM(\frac{\pi}{3}))$
(resp. $(OM(\pi))$).



... à compléter par symétrie (on peut obtenir....)

* Etude au voisinage de $M(0)$:

$$x(\theta) = \rho \cos \theta = (2 \cos \theta - \cos 2\theta) \cdot \cos \theta = 2 \cos^2 \theta - 2 \cos^3 \theta + \cos \theta$$

Comme $\begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) \\ \cos^2 \theta = 1 - \theta^2 + o(\theta^2) \\ \cos^3 \theta = 1 + 3\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) + o(\theta^2) = 1 - \frac{3}{2} \theta^2 + o(\theta^2) \end{cases}$

on trouve :

$$x(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

Donc $x(\theta) > 1$ pour θ voisin de 0, et l'allure de la courbe en ce point.

* Recherche des points doubles (autres que l'origine)

$M(\theta)$ décrit toute la courbe quand θ varie de 0 à 2π .

$$M(\theta_1) = M(\theta_2) \Leftrightarrow \rho(\theta_1) \vec{u}_{\theta_1} = \rho(\theta_2) \vec{u}_{\theta_2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) \text{ et } \theta_2 = \theta_1 \\ \text{ou} \\ \rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2) \text{ et } \theta_2 = \theta_1 + \pi \end{cases}$$

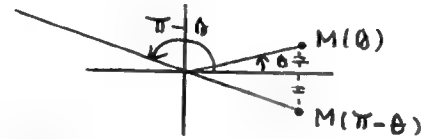
Les vecteurs de base étant opposés, $-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ sera aussi la pente de la 2-tangente dans le 1-repère $(D, \vec{u}_{\frac{\pi}{4}}, \vec{v}_{\frac{\pi}{4}})$. De sorte que $(1+\sqrt{2}) \cdot \frac{-1}{1+\sqrt{2}} = -1$ indique que ces 2 tangentes sont orthogonales.

Étude et représentation graphique de la courbe :

$$\rho = \frac{\sin \theta \cdot (\sin \theta + 1)}{\cos \theta}$$

* $\theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$, α à déterminer judicieusement.

$\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$ d'où le dessin :



$\pi - \theta$ et θ sont symétriques / à $\frac{\pi}{2}$:

donc on choisit l'intervalle d'étude $[\frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} + \pi] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

On se restreint à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis on complète par symétrie / à Ox .

* ρ n'est pas définie pour $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, or ici $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\rho' = \frac{-\sin^3 \theta + 2 \sin \theta + 1}{\cos^2 \theta}$$

$$\rho' = 0 \Leftrightarrow \sin^3 \theta - 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 - 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(X^2 - X - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Comme $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, on aura :

$$\rho' = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = -1 \text{ ou } \sin \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \theta_0 \text{ (avec } \theta_0 \approx -38^\circ)$$

*

θ	$-\frac{\pi}{2}$	θ_0	0	$\frac{\pi}{2}$
ρ'		-	0	+
ρ		0	\nearrow	$\nearrow +\infty$

-0,3

* $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \rho(\theta) = 0$ car $\rho \sim -\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}$, et la règle de l'Hôpital

$$\text{donne } \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} -\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} -\frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = 0$$

* $\rho(0) = 0$ donc la courbe admet une tangente horizontale à l'origine (en effet : $\vec{OM}'(\theta) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \vec{v}_\theta \Rightarrow \vec{OM}'(0) = \rho'(0) \vec{u}_0$ où $\rho'(0) = 1$)

* Étude en $M(-\frac{\pi}{2})$: $M(-\frac{\pi}{2})$ est le pt obtenu pour θ tendant vers $-\frac{\pi}{2}$.
C'est l'origine O . La tge en tout point $M(\theta)$ avec θ proche de $-\frac{\pi}{2}$ est dirigée par $\vec{OM}(\theta) = r'(\theta) \vec{u}_\theta + r(\theta) \vec{v}_\theta$, d'où

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \vec{OM}(\theta) = -\frac{1}{2} \vec{u}_{-\frac{\pi}{2}} + 0 \cdot \vec{v}_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \vec{z}$$

puisque $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} r'(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^3 \theta - 2 \sin \theta - 1}{\cos^2 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin^2 \theta \cos \theta + 2 \cos \theta}{2 \cos \theta (-\sin \theta)} = -\frac{1}{2}$ (Règle de l'Hôpital)

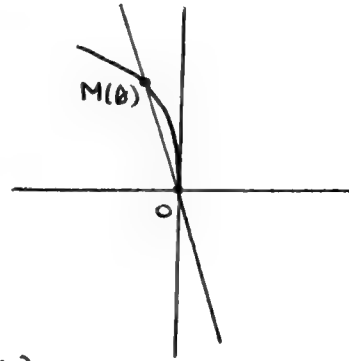
2^e solution :

Cherchons donc la limite de la pente de la sécante ($OM(\theta)$) quand $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}$:

La pente de la sécante ($OM(\theta)$) est $\frac{y(\theta)}{x(\theta)}$

$$\text{on } \begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

soit $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan \theta = -\infty$



La tangente sera donc verticale en $M(-\frac{\pi}{2})$

3^e solution :

$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta}{-\sin^2 \theta + \sin \theta + 1} \quad \text{donc } \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = 0 \quad \text{et la tge en } M(-\frac{\pi}{2})$$

sera bien verticale.

* Branche infinie pour $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$

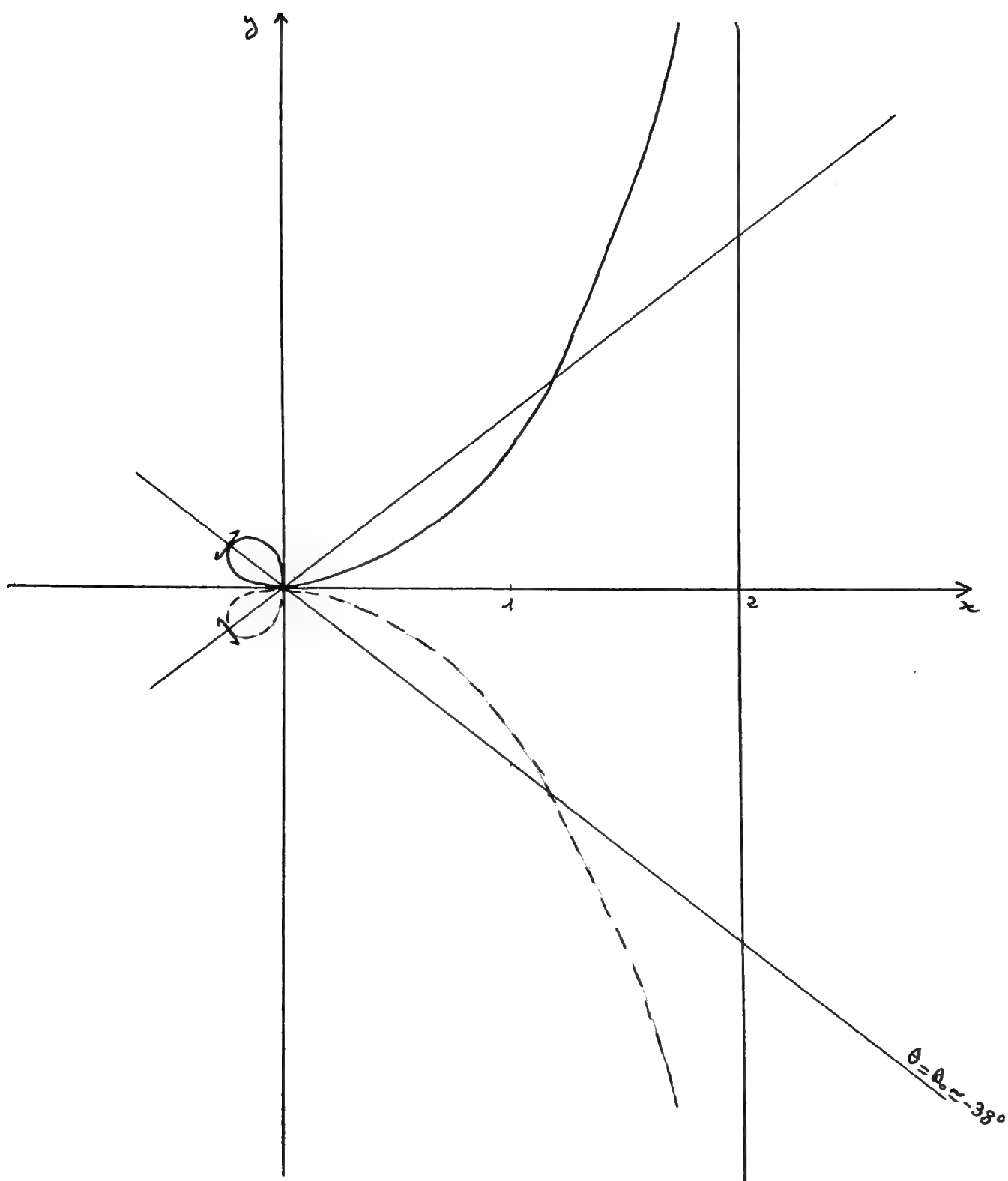
Dans le repère $R_{\frac{\pi}{2}} = (O, \vec{u}_{\frac{\pi}{2}}, \vec{v}_{\frac{\pi}{2}})$, les coordonnées de $M(\theta)$ sont

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \longrightarrow +\infty & (\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}) \\ y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin \theta (\sin \theta + 1)}{\cos \theta} (-\cos \theta) = -\sin \theta (\sin \theta + 1) \end{cases}$$

$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} y(\theta) = -2$ donc la droite d'équation $y = -2$ dans

le repère $R_{\frac{\pi}{2}}$ est asymptote à la courbe quand $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

2/5/93



$$\rho = \frac{\sin \theta \cdot (\sin \theta + 1)}{\cos \theta}$$

Etudier et donner l'allure de la courbe d'équation polaire

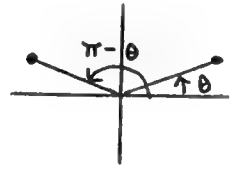
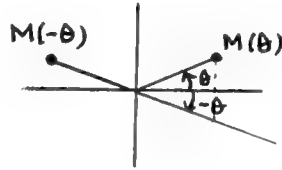
$$\rho = - \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}$$

* Intervalle d'étude :

Étude sur $[-\pi, \pi] \setminus \pi\mathbb{Z}$

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ donc étude sur $]0, \pi[$ et symétrie $\text{à } Oy$.

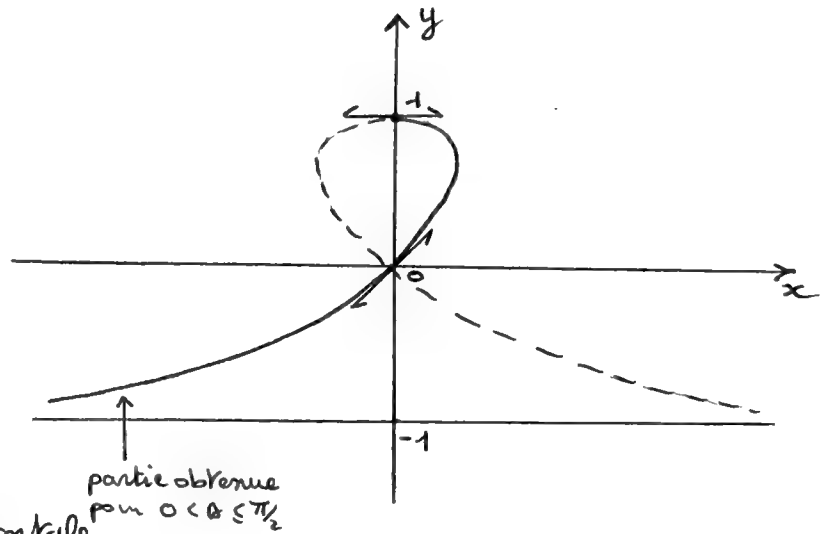
$\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$ donc étude sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ puis symétrie $\text{à } Oy$.



* $\rho' = \frac{\cos \theta \cdot (3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta}$

s'annule si $\cos \theta = 0$, ie $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
ρ'		+
ρ	$-\infty$	-1



* Tgte en $M(\frac{\pi}{2})$:

$$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\text{donc } V = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$$

Le tgc en $M(\frac{\pi}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc horizontale.

* $\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, ici $\theta = \frac{\pi}{4}$

* Tgte en $\theta = \frac{\pi}{4}$: elle sera dirigée par $\vec{u}_{\frac{\pi}{4}}$, car $\rho(\frac{\pi}{4}) = 0$ entraîne

$$\vec{OM}'(\theta) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \vec{v}_\theta \text{ vaut } \rho'(\frac{\pi}{4}) \vec{u}_{\frac{\pi}{4}} \text{ en } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

* Étude de la branche infinie pour $\theta \rightarrow 0_+$: On se place dans le repère $R_0 = (O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$.

$$M(\theta) \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} \text{ dans } R_0, \text{ où } \begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta \rightarrow -\infty \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta = -\cos 2\theta \rightarrow -1 \end{cases}$$

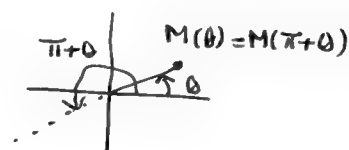
pour $\theta \rightarrow 0_+$.
La droite $y = -1$ dans le repère R_0 sera asymptote à la courbe.

Étudier et représenter graphiquement la courbe dont une équation polaire est $\rho(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta}$

On montrera, en particulier, l'existence d'une symétrie par rapport à la droite $\theta = \frac{\pi}{4}$ et on précisera la tangente aux points de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

* $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ donc θ doit être différent de $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ pour que $\rho(\theta)$ soit défini.

* $\rho(\pi + \theta) = -\rho(\theta)$ (1)



* Symétrie $\frac{1}{2}$ de (Δ) d'équation $\theta = \frac{\pi}{4}$:

On vérifie que $\rho(\frac{\pi}{2} + \theta) = \rho(\frac{\pi}{2} - \theta)$, soit :

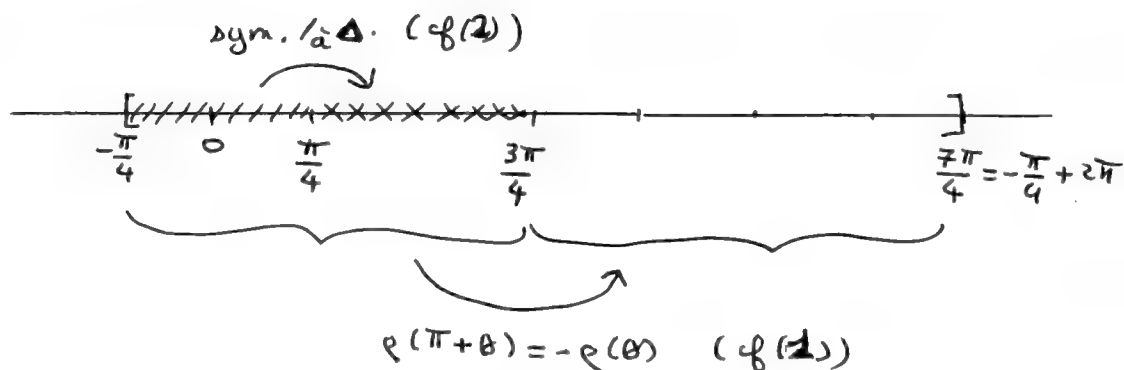
2-méthode : Plus simple !

$$\rho(\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho(\theta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + 2\theta)}{\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2} \cos \theta} \\ \rho(\frac{\pi}{4} - \theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)}{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2} \cos \theta} \end{array} \right.$$


d'où la symétrie (2)

* On prendra l'intervalle $[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} + 2\pi] = [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}] \doteq \mathcal{J}$ de longueur 2π . On étudiera $\rho(\theta)$ pour θ variant dans $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ puis on complètera par symétrie $\frac{1}{2}(\Delta)$, compte tenu du schéma :



* On trouve $\rho'(\theta) = \frac{2(\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \geq 0$ pour tout θ

(car $\cos^3 \theta \geq \sin^3 \theta \Leftrightarrow \cos \theta \geq \sin \theta \Leftrightarrow \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \geq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi + \pi$ - On bien voir le cercle trigo. !)
avec $\cos \theta \geq \sin \theta \Leftrightarrow 1 \geq \tan \theta$ et 

θ	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
ρ'		+	+
ρ	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$	

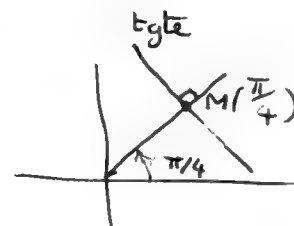
* $\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\frac{\pi}{2}$, ici $\theta = 0$.

Comme $\rho'(0) = 2 \neq 0$, $M(0)$ ne sera pas stationnaire. Il n'y aura aucun pt stationnaire (Les seuls pts susceptibles d'être stationnaires sur une courbe en polaire étant l'origine obtenue pour θ tq $\rho(\theta) = 0$. En effet, si $\vec{OM}(\theta) = \rho \vec{u}_\theta$, alors $\vec{OM}'(\theta) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \vec{v}_\theta = 0$ si $\rho = \rho' = 0 \dots$)

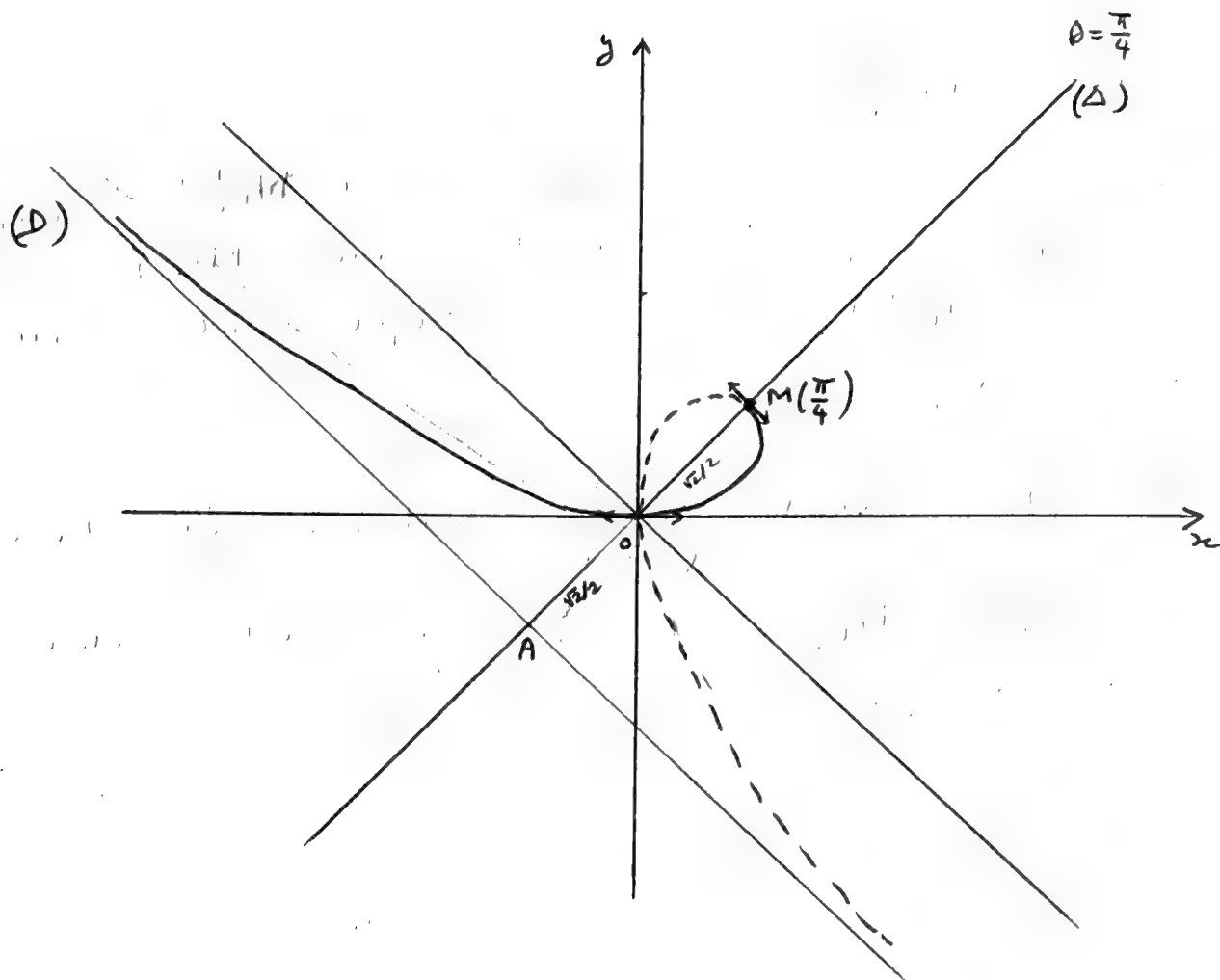
La tangente en $M(0)$ sera horizontale. (car $\vec{OM}'(0) = \rho'(0) \vec{u}_0 = 2 \vec{e}$)

* Tangente en $M(\frac{\pi}{4})$:

$$\tan V = \frac{\rho(\frac{\pi}{4})}{\rho'(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0} = +\infty$$



La tgle en $M(\frac{\pi}{4})$ est perpendiculaire à $(OM(\frac{\pi}{4}))$



* Etude pour $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}$:

Alors $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \rho(\theta) = -\infty$. On se place dans le repère $(O, \vec{u}_{-\frac{\pi}{4}}, \vec{v}_{-\frac{\pi}{4}})$

où les coordonnées de $M(\theta)$ sont :

$$\begin{cases} X = \rho(\theta) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow -\infty \\ Y = \rho(\theta) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,7 \quad (\theta \rightarrow -\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

La droite d'équation $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ est asymptote à la courbe.

C'est la dte (D) perpendiculaire à (Δ) passant par le point A symétrique de $M(\frac{\pi}{4})$ à l'origine. (cf figure)

* Tgté en $M(\frac{\pi}{2})$:

$e(\frac{\pi}{2}) = 0$. La partie de la courbe voisine de $M(\frac{\pi}{2})$ est symétrique de la partie de la courbe voisine de $M(0)$ / $a(0)$. La tgté en $M(\frac{\pi}{2})$ sera donc la symétrique de la tgté en $M(0)$, ie l'axe Oy .

Résolution : $\tan V = \frac{e(\frac{\pi}{2})}{e'(\frac{\pi}{2})} = 0$ donc l'angle entre Ox

et la tgté en $M(\frac{\pi}{2})$ est $0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. La tgté cherchée est l'axe Oy .

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
Département de Mathématiques/Informatique

Session de Septembre 1993
Deuxième année

U.V.M12 (Algèbre/Analyse)
Durée 3 heures

Pour avis
sept 96

PARTIE II (Analyse) (11 pts)

Exercice 1 (6 pts)

Soit α un réel strictement positif, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n définie pour tout réel t par $f_n(t) = e^{-nt^2}$ et la suite U définie par $U_n = \int_0^\alpha f_n(t) dt$.

- 1°) Pour n fixé, étudier les variations de la fonction f_n
2°) Justifier l'existence de la suite U , calculer $U_{n+1} - U_n$, en déduire que la suite U est convergente.

3°) Pour tout $n \geq 2$, montrer que : $\int_{\frac{1}{\ln n}}^1 f_n(t) dt \leq \frac{1}{\ln n}$

4°) a) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 2$ tel que : pour $n \geq n_0$

on ait, $\frac{1}{\ln n} < \alpha$.

b) Montrer que pour $n \geq n_0$, on a : $\int_{\frac{1}{\ln n}}^\alpha f_n(t) dt \leq \left(\alpha - \frac{1}{\ln n}\right) e^{\frac{-n}{(\ln n)^2}}$

5°) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(\ln x)^2}$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$)

b) Déduire des questions précédentes la limite de la suite U .

Exercice 2 (5 pts)

Etudier et représenter graphiquement la courbe, dont une équation polaire est :

$$f(\theta) = \rho = \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta}.$$

On montrera en particulier l'existence d'une symétrie par rapport à la droite

$\theta = \frac{\pi}{4}$ et on précisera la tangente aux points de paramètre $\theta = \frac{\pi}{4}$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Branche infinie d'une courbe en polaire

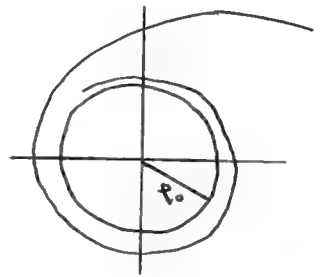
$\rho = \rho(\theta)$ définit une courbe en polaire \mathcal{C}

Il y a une branche infinie dans l'un des cas suivants :

- (1) $\rho(\theta)$ est défini pour θ voisin de $\pm\infty$
- (2) $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$ (où $\theta_0 \in \mathbb{R}$)

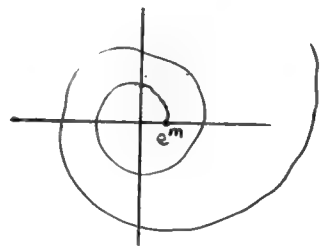
Cas (1)

- Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = \rho_0 \in \mathbb{R}$, on a un cercle asymptote et une branche spirale. La courbe s'enroule autour du cercle - asymptote

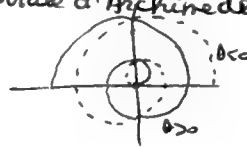


- Si $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} \rho(\theta) = \pm\infty$, on a une spirale

exemple 1 :
type logarithmique $\rho = e^{m\theta}$
avec m



exemple 2 :
Spirale d'Archimède : $\rho = \theta$



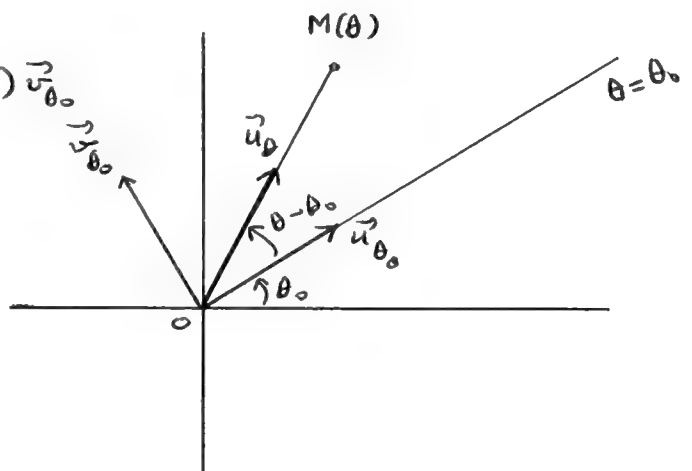
Cas (2)

On se place dans le repère $R_{\theta_0} \doteq (O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$ où $\vec{v}_{\theta_0} = \vec{u}'_{\theta_0}$

$$\vec{OM}(\theta) = \rho \vec{u}_{\theta} = \rho \cos(\theta - \theta_0) \vec{u}_{\theta_0} + \rho \sin(\theta - \theta_0) \vec{v}_{\theta_0}$$

Notons $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $M(\theta)$ dans le repère R_{θ_0} . On a :

$$\begin{cases} X = \rho \cos(\theta - \theta_0) \\ Y = \rho \sin(\theta - \theta_0) \end{cases}$$



On étudie alors la branche infinie comme celle d'un arc paramétré. Soit $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} X = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \varphi(\theta) \cos(\theta - \theta_0) = \pm \infty$, et :

1) Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} Y = k \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $Y = k$ dans le repère R_{θ_0} sera asymptote

2) Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} Y = \pm \infty$, on constate :

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{Y}{X} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \tan(\theta - \theta_0) = 0$$

donc \mathcal{C} admet seulement une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des X , ie l'axe $\theta = \theta_0$.

Cardioïde

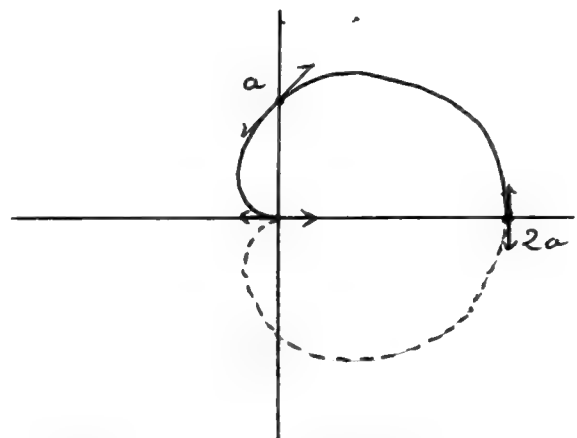
Étude et graphique de

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad a > 0$$

* ρ est périodique de période 2π . Comme $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, on pourra étudier ρ pour $\theta \in [0, \pi]$ et compléter par symétrie l'a Ox.

* $\rho' = -a \sin \theta < 0$

θ	0	π
ρ'		-
ρ	$2a$	0



* Tangente en $M(0)$:

$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2a}{0} = +\infty$ et la tangente sera verticale.

* tgte en $M(\frac{\pi}{2})$:

$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a}{-a} = -1$ et la tgte en $M(\frac{\pi}{2})$ sera // à la 1^{re} bissectrice.

* tgte en $M(\pi)$:

$\rho(\pi) = 0$, $\rho'(\pi) = 0$ mais $\rho''(\pi) = a \neq 0$. La tangente en $M(\pi) = 0$ sera l'axe plane (O, \vec{u}_π) , ie horizontale.

Tangente à une courbe en polaire

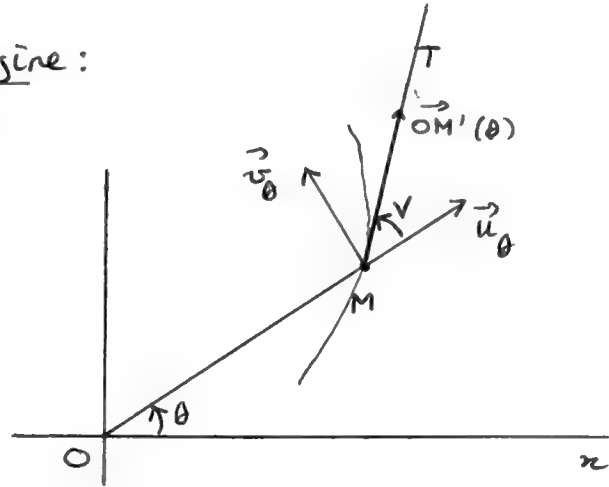
1) Tgt à un pt autre que l'origine :

$$\rho = \rho(\theta)$$

$$\vec{OM}(\theta) = \rho(\theta) \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\vec{OM}'(\theta) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \vec{v}_\theta$$

$$\text{or } \vec{v}_\theta \doteq \vec{u}'_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$



$\vec{OM}'(\theta)$ sera toujours non nul puisque par hypothèse $\rho(\theta) \neq 0$. L'angle V entre \vec{u}_θ et $\vec{OM}'(\theta)$ sera tel que

$$\tan V = \tan(\vec{u}_\theta, \vec{OM}'(\theta)) = \frac{\rho}{\rho'}$$

ce qui détermine parfaitement V à π près, donc T .

En angles de droites, on aura :

$$\begin{aligned} (Ox, T) &= (Ox, \vec{u}_\theta) + (\vec{u}_\theta, T) \\ &= \theta + V \quad [\pi] \end{aligned}$$

Résumé :

$$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} \quad \text{donne} \quad V = (\vec{u}_\theta, T) \quad [\pi]$$

2) Tgt à l'origine :

Les seuls points d'une courbe en polaire pouvant être stationnaire est l'origine.

Supposons que la courbe passe par 0. Alors $\rho(\theta_0) = 0$.

- Si $\rho'(\theta_0) \neq 0$, $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = 0$ prouve que $T = (0, \vec{u}_{\theta_0})$
 $(0, \vec{u}_{\theta_0})$ est ce qu'on appelle "l'axe polaire" en θ_0 .

- Si $\rho'(\theta_0) = 0$, retournons aux vecteurs susceptibles de diriger la tangente :

$$\vec{OM}(\theta) = \rho \cos \theta \vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j} = \rho \vec{u}_\theta$$

$$\vec{OM}'(\theta) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \vec{u}_\theta'$$

$$\vec{OM}''(\theta) = \rho'' \vec{u}_\theta + 2\rho' \vec{u}_\theta' + \rho \vec{u}_\theta'' \quad \text{avec } \vec{u}_\theta'' = -\vec{u}_\theta$$

...

Si $\vec{OM}'(\theta_0) = 0$

$$\vec{OM}''(\theta_0) = \rho''(\theta_0) \cdot \vec{u}_{\theta_0}$$

Si $\rho''(\theta_0) \neq 0$,
 $\vec{OM}''(\theta_0)$ et donc \vec{u}_{θ_0}
 dirige la tge

Si $\rho''(\theta_0) = 0$

$$\vec{OM}'''(\theta_0) = \rho'''(\theta_0) \vec{u}_{\theta_0}$$

Si $\rho'''(\theta_0) \neq 0$
 \vec{u}_{θ_0} dirige la tge

Si $\rho'''(\theta_0) = 0$

$$\vec{OM}^{(4)}(\theta_0) = \rho^{(4)}(\theta_0) \vec{u}_{\theta_0}$$



etc

Revenir : Si $\rho(\theta_0) = 0$, et s'il existe $k \geq 1$ tq $\rho^{(k)}(\theta_0) \neq 0$
 (ce qui est le cas le plus général !), alors l'axe polaire $(0, \vec{u}_{\theta_0})$ est
 la tangente à $M(\theta_0) = 0$.

Etudier et représenter la courbe : $\rho = \frac{\text{ch } \theta}{\text{sh } \theta - \text{ch } \theta}$

$\rho(\theta)$ est définie sur \mathbb{R} car $\text{sh } \theta < \text{ch } \theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\rho = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta} - (e^\theta + e^{-\theta})} = -\frac{1}{2} (1 + e^{2\theta})$$

$\rho' = -e^{2\theta} < 0$ donc

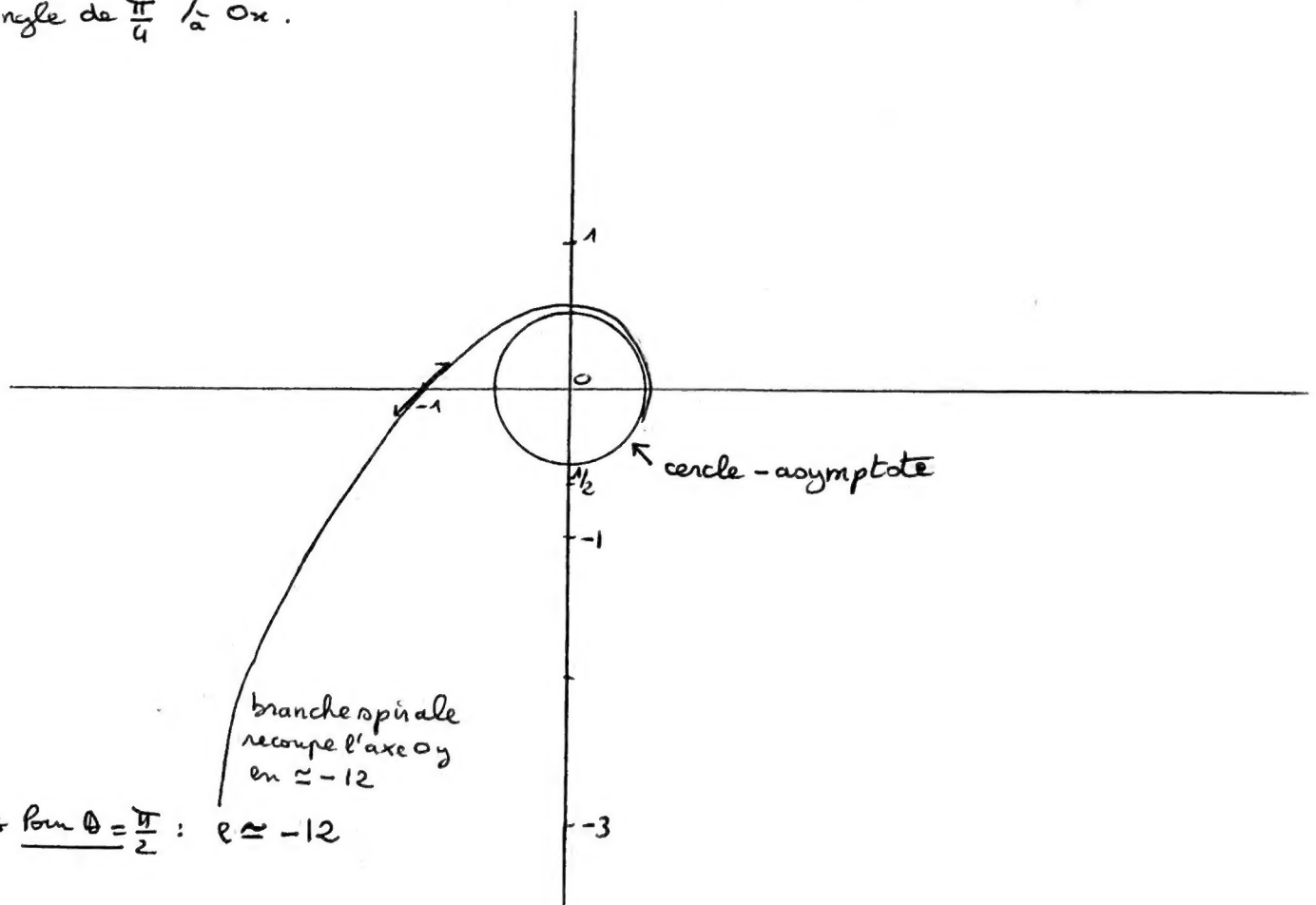
θ	$-\infty$		$+\infty$
ρ'		-	
ρ	$-\frac{1}{2}$	\rightarrow	$-\infty$

La courbe aura l'allure d'une spirale pour $\theta \rightarrow +\infty$.

Comme $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \rho(\theta) = -\frac{1}{2}$, le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$ sera

cercle-asymptote quand $\theta \rightarrow -\infty$.

* Pour $\theta = 0$: $\rho = \rho' = -1 \Rightarrow \frac{\rho}{\rho'} = 1 \Rightarrow V = \frac{\pi}{4}$. La tangente à $M(0)$ fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ / à Ox.



* Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\rho \approx -12$

Étudier la courbe dont une équation en polaire est :

$$\rho = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$\rho = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos \theta}$ est périodique de période 2π , et définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

L'étude se fera pour $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$.

$$\rho' = \frac{-1 + \sin \theta - \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} = - \frac{1 + \sqrt{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{4})}{(1 + \cos \theta)^2}$$



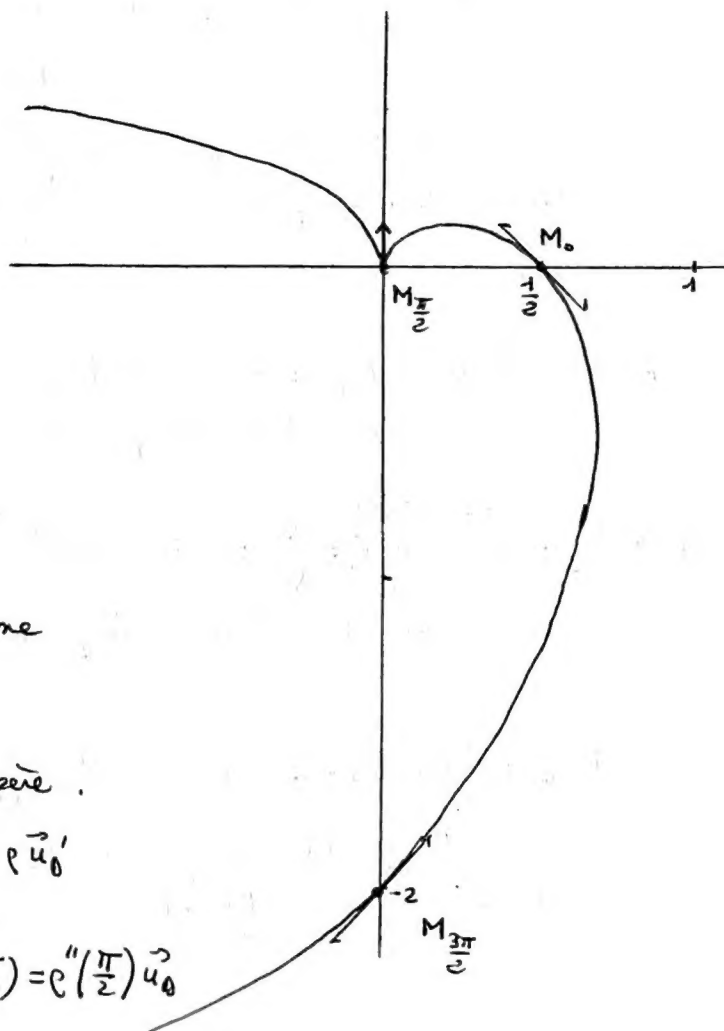
$$\begin{aligned} \text{De sorte que } \rho' \geq 0 &\Leftrightarrow \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \theta \leq \pi + k2\pi \end{aligned}$$

En se plaçant dans $[0, 2\pi]$, on aura :

$$\rho' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

donc le tableau de variation :

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
ρ'	-	0	+	-
ρ	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	$\frac{1}{2}$



* M_0 : $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -1 \Rightarrow V = -\frac{\pi}{4}$

La tgte en M_0 fait donc un angle de $-\frac{\pi}{4}$ avec

le vecteur $\vec{u}_0 = \vec{i}$ (on pose $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$

et $\vec{v}_\theta = \frac{d}{d\theta} \vec{u}_\theta = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{j}$ comme d'habitude)

* $M_{\frac{\pi}{2}}$: la courbe passe par l'origine du repère.

Gra $\rho(\frac{\pi}{2}) = \rho'(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc $\vec{OM}'(\theta) = \rho' \vec{u}_\theta + \rho \vec{u}_\theta'$

est nul en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ce point est stationnaire.

Mais $\vec{OM}''(\theta) = (\rho'' - \rho) \vec{u}_\theta + 2\rho' \vec{u}_\theta' \Rightarrow \vec{OM}''(\frac{\pi}{2}) = \rho''(\frac{\pi}{2}) \vec{u}_\theta$ qui n'est pas nul.

La tgte en $M_{\frac{\pi}{2}} = 0$ sera donc orientée par $\vec{u}_{\frac{\pi}{2}}$, ie verticale.

* Quand $\theta \rightarrow \pi_-$: $\lim_{\theta \rightarrow \pi_-} \rho = +\infty$ donc la courbe admet la direction asymptotique

$\mathbb{R} \vec{u}_\pi = (0, x)$ quand $\theta \rightarrow \pi_-$. y a-t'il une asymptote ?

1^{re} méthode :
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \rightarrow -\infty \\ y = \rho \sin \theta = \frac{(1 - \sin \theta) \sin \theta}{1 + \cos \theta} \rightarrow +\infty \quad (\theta \rightarrow \pi_-) \end{cases}$$
 d'après la règle de l'Hôpital.

On a $\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \rightarrow 0_- \quad (\theta \rightarrow \pi_-)$.

Il y a donc une branche parabolique de dir. asymptotique l'axe des x quand θ tend vers π_- .

2^e méthode : Dans le repère $(O, \vec{u}_\pi, \vec{v}_\pi)$, on a :

$$\begin{cases} X(\theta) = \rho(\theta) \cdot \cos(\theta - \pi) \rightarrow +\infty \quad (\theta \rightarrow \pi_-) \\ Y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta - \pi) \end{cases}$$

$$Y(\theta) = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos \theta} \sin(\theta - \pi) = \frac{1 + \sin t}{1 - \cos t} \sin t \quad \text{en posant } t = \theta - \pi \rightarrow 0_-$$

$$\text{Soit } \lim_{\theta \rightarrow \pi_-} Y(\theta) = \lim_{t \rightarrow 0_-} \frac{\sin t + \sin^2 t}{1 - \cos t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Règle de l'Hôpital)}}}{=} \lim_{t \rightarrow 0_-} \frac{\cos t + 2 \sin t \cos t}{\sin t} = -\infty$$

Il y a donc une branche parabolique de direction asymptotique $\mathbb{R} \vec{u}_\pi = (0, x)$
(Ramis V 1.4.2 p 53)

* Quand $\theta \rightarrow \pi_+$: les mêmes calculs que ci-dessus sont valides (à part les signes)

Il y a encore une branche parabolique de dir. asympt. l'axe des x .

* $M_{\frac{3\pi}{2}}$: $\rho(\frac{3\pi}{2}) = 2$ et $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -1 \Rightarrow V = -\frac{\pi}{4}$. La tangente T à la courbe en $M_{\frac{3\pi}{2}}$ fera un angle de $-\frac{\pi}{4}$ avec $\vec{u}_{\frac{3\pi}{2}}$: $\widehat{\vec{u}_{\frac{3\pi}{2}}, T} = -\frac{\pi}{4}$

* $M_{2\pi}$: $\rho(2\pi) = \frac{1}{2}$ et $\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = -1 \Rightarrow \widehat{\vec{u}_{2\pi}, T} = -\frac{\pi}{4}$

La tangente en $M_{2\pi}$ est la même que la tgte en M_0 . La courbe obtenue sera donc lisse en $M_0 = M_{2\pi}$.